

10.49

$$f^2(x) = (x-1)^2 \Rightarrow |f(x)| = |x-1| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} |x-1| & , \text{για κάποια } x \\ -|x-1| & , \text{για τα υπόλοιπα } x \end{cases}$$

Όμως

Έστω ρ ρίζα της f , άρα $f(\rho) = 0$

$$\text{Είναι } f^2(x) = (x-1)^2 \Rightarrow f^2(\rho) = (\rho-1)^2 \Rightarrow (\rho-1)^2 = 0 \Rightarrow \rho-1 = 0 \Rightarrow \rho = 1$$

Έχουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$

Οι δυνατές περιπτώσεις της f θα είναι

$$f_1(x) = |x-1| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} = \begin{cases} x-1 & , \text{για } x \leq 1 \\ -x+1 & , \text{για } x > 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = -|x-1| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} = \begin{cases} -(x-1) & , \text{για } x \leq 1 \\ -(-x+1) & , \text{για } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -x+1 & , \text{για } x \leq 1 \\ x-1 & , \text{για } x > 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} |x-1| & , \text{για } x \leq 1 \\ -|x-1| & , \text{για } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -x+1 & , \text{για } x \leq 1 \\ -(x-1) & , \text{για } x > 1 \end{cases} = -x+1 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} -|x-1| & , \text{για } x \leq 1 \\ |x-1| & , \text{για } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -(-x+1) & , \text{για } x \leq 1 \\ x-1 & , \text{για } x > 1 \end{cases} = x-1 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Συνοπτικά οι δυνατές περιπτώσεις είναι

$$f_1(x) = \begin{cases} x-1 & , \text{για } x \leq 1 \\ -x+1 & , \text{για } x > 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -x+1 & , \text{για } x \leq 1 \\ x-1 & , \text{για } x > 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = -x+1 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f_4(x) = x-1 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$