

10.44

Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ f(5) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ διατηρεί } \underline{\text{σταθερό αρνητικό πρόσημο}} \text{ στο } \mathbb{R}$$

δηλαδή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - 1] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \stackrel{\substack{f: \text{συνεχής} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty}}{=} [f(0) - 1] \cdot (+\infty) \stackrel{(1) \Rightarrow f(0) < 0 \Rightarrow f(0) - 1 < 0}{=} \boxed{-\infty}$$