

10.43

Επειδή

ο α είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \pi x + \kappa = 0$ θα είναι $\alpha^2 + \pi\alpha + \kappa = 0$ (1)

ο β είναι ρίζα της εξίσωσης $-x^2 + \pi x + \kappa = 0$ θα είναι $-\beta^2 + \pi\beta + \kappa = 0$ (2)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \pi x + \kappa$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} f(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2 + \pi\alpha + \kappa \stackrel{(1) \Rightarrow \pi\alpha + \kappa = -\alpha^2}{=} \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha^2 = -\frac{1}{2}\alpha^2 \stackrel{\substack{\alpha \neq 0, \text{ διότι αν } \alpha=0 \\ (1) \Rightarrow 0^2 + \pi \cdot 0 + \kappa = 0 \Rightarrow \kappa=0 \\ \text{άτοπο αφού } \kappa \in \mathbb{R}^+}}{<} 0 \\ f(\beta) = \frac{1}{2}\beta^2 + \pi\beta + \kappa \stackrel{(2) \Rightarrow \pi\beta + \kappa = \beta^2}{=} \frac{1}{2}\beta^2 + \beta^2 = \frac{3}{2}\beta^2 \stackrel{\substack{b \neq 0, \text{ διότι αν } b=0 \\ (2) \Rightarrow -0^2 + \pi \cdot 0 + \kappa = 0 \Rightarrow \kappa=0 \\ \text{άτοπο αφού } \kappa \in \mathbb{R}^+}}{>} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\alpha)f(\beta) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $\frac{1}{2}x^2 + \pi x + \kappa = 0$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα (α, β)