

10.42

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x)\eta\mu^2x + g(x)\sigma\upsilon\nu^2x - x$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= f(\alpha)\eta\mu^2\alpha + g(\alpha)\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \alpha \stackrel{f(\alpha)=\alpha}{=} \alpha\eta\mu^2\alpha + g(\alpha)\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \alpha \\ h(\beta) &= f(\beta)\eta\mu^2\beta + g(\beta)\sigma\upsilon\nu^2\beta - \beta \stackrel{g(\beta)=\beta}{=} f(\beta)\eta\mu^2\beta + \beta\sigma\upsilon\nu^2\beta - \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= \alpha(\eta\mu^2\alpha - 1) + g(\alpha)\sigma\upsilon\nu^2\alpha \stackrel{\eta\mu^2\alpha - 1 = -\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{=} -\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha + g(\alpha)\sigma\upsilon\nu^2\alpha \\ h(\beta) &= f(\beta)\eta\mu^2\beta + \beta(\sigma\upsilon\nu^2\beta - 1) \stackrel{\sigma\upsilon\nu^2\beta - 1 = -\eta\mu^2\beta}{=} f(\beta)\eta\mu^2\beta - \beta\eta\mu^2\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha [g(\alpha) - \alpha] \stackrel{f(\alpha)=\alpha}{=} \sigma\upsilon\nu^2\alpha [g(\alpha) - f(\alpha)] \stackrel{f(x) \leq g(x)}{\geq} 0 \\ h(\beta) &= \eta\mu^2\beta [f(\beta) - \beta] \stackrel{g(\beta)=\beta}{=} \eta\mu^2\beta [f(\beta) - g(\beta)] \stackrel{f(x) \leq g(x)}{\leq} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{h(\alpha) \cdot h(\beta) \leq 0}$$

Αν $h(\alpha) = 0$ τότε για $\xi = \alpha \in [\alpha, \beta]$ έχουμε $h(\xi) = 0$

Αν $h(\beta) = 0$ τότε για $\xi = \beta \in [\alpha, \beta]$ έχουμε $h(\xi) = 0$

Αν $h(\alpha) \neq 0$ και $h(\beta) \neq 0$ τότε προφανώς $h(\alpha)h(\beta) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ (άρα $\xi \in [\alpha, \beta]$) τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi)\eta\mu^2\xi + g(\xi)\sigma\upsilon\nu^2\xi - \xi = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(\xi)\eta\mu^2\xi + g(\xi)\sigma\upsilon\nu^2\xi = \xi}$$