

## 10.41

Επειδή  $\rho_1$  και  $\rho_2$  είναι ρίζες της  $f$  θα είναι  $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$

Ακόμη  $f(x) - g(x) = cx \Rightarrow g(x) = f(x) - cx$

Η συνάρτηση  $g$

είναι συνεχής στο διάστημα  $[\rho_1, \rho_2]$ , ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} g(\rho_1) &= f(\rho_1) - c\rho_1 \stackrel{f(\rho_1)=0}{=} -c\rho_1 \\ g(\rho_2) &= f(\rho_2) - c\rho_2 \stackrel{f(\rho_2)=0}{=} -c\rho_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(\rho_1) \cdot g(\rho_2) = c^2 \rho_1 \rho_2 \stackrel{\rho_1 \rho_2: \text{ετερόσημες} \Rightarrow \rho_1 \rho_2 < 0}{\Rightarrow} \boxed{g(\rho_1) \cdot g(\rho_2) \leq 0}$$

Αν  $g(\rho_1) = 0$  τότε για  $\xi = \rho_1 \in [\rho_1, \rho_2]$  έχουμε  $g(\xi) = 0$

Αν  $g(\rho_2) = 0$  τότε για  $\xi = \rho_2 \in [\rho_1, \rho_2]$  έχουμε  $g(\xi) = 0$

Αν  $g(\rho_1) \neq 0$  και  $g(\rho_2) \neq 0$  τότε προφανώς  $g(\rho_1) \cdot g(\rho_2) < 0$ , οπότε από το θεώρημα

Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$  (άρα  $\xi \in [\rho_1, \rho_2]$ ) τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = 0$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in [\rho_1, \rho_2]$  τέτοιο ώστε

$g(\xi) = 0$ , οπότε η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα  $[\rho_1, \rho_2]$