

10.40

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f^2(x) + f(x) + x$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = f^2(0) + f(0) = f(0)[f(0) + 1] \begin{array}{l} f(0) \leq 0 \\ f(0) > -1 \end{array} \leq 0 \\ h(1) = f^2(1) + f(1) + 1 \begin{array}{l} \text{Αν } y=f(1) \text{ τότε} \\ f^2(1)+f(1)+1=y^2+y+1>0 \text{ διότι } \Delta=-3<0 \end{array} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{h(0) \cdot h(1) \leq 0}$$

Αν $h(0) = 0$ τότε για $\xi = 0 \in [0,1]$ έχουμε $h(\xi) = 0$

Αν $h(0) \neq 0$ τότε προφανώς $h(0)h(1) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ (άρα $x_0 \in [0,1)$) τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0,1)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow \boxed{f^2(\xi) + f(\xi) + \xi = 0}$$