

10.4 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 8x^3 - 12x^2 - 6x + 5$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως πολωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 8 \cdot 0^3 - 12 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5 > 0 \\ f(1) &= 8 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = -5 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $8x^3 - 12x^2 = 6x - 5$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

10.4 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - x - 5$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$, ως πολωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 1 - 5 = -5 < 0 \\ f(3) &= 3^3 - 3 - 5 = 19 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1)f(3) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^3 - x = 5$, έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$

10.4 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 1$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 4]$, ως πολωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 - 2(-1) - 1 = -1 < 0 \\ f(4) &= 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 - 1 = 3 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1)f(4) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^3 - 2x = 3x^2 + 1$, έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 4)$

10.4 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 3$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 2]$, ως πολωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)^4 + 2(-1)^3 - (-1)^2 - (-1) - 3 = -4 < 0 \\ f(2) &= 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 2^2 - 2 - 3 = 23 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1)f(2) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^4 + 2x^3 - x^2 = x + 3$, έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$

10.4 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 1$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 7(-1) - 1 = -13 < 0 \\ f(1) &= 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 1 = 5 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1)f(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $2x^3 = 3x^2 - 7x + 1$, έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$

10.4 6)

Η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{x-1}{2}$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $2\eta\mu x - x + 1 = 0$.

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2\eta\mu x - x + 1$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 3]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 2\eta\mu 0 - 0 + 1 = 1 > 0 \\ f(3) &= 2\eta\mu 3 - 3 + 1 = 2\eta\mu 3 - 2 = 2(\eta\mu 3 - 1) \underset{\eta\mu 3 < 1}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(3) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{x-1}{2}$, έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα $(0, 3)$