

10.37

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 5x^4 + (2\alpha^2 - 1)x^2 + (\alpha - 2)x - \alpha^2$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, ως πολυωνυμική

$$f(0) = 5 \cdot 0^4 + (2\alpha^2 - 1)0^2 + (\alpha - 2) \cdot 0 - \alpha^2 = -\alpha^2 \stackrel{\alpha \neq 0}{\Rightarrow} \boxed{f(0) < 0}$$

$$f(1) = 5 \cdot 1^4 + (2\alpha^2 - 1) \cdot 1^2 + (\alpha - 2) \cdot 1 - \alpha^2 = 5 + 2\alpha^2 - 1 + \alpha - 2 - \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha + 2$$

Είναι $\boxed{f(1) > 0}$ διότι

$\alpha^2 + \alpha + 2 > 0$ αφού $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ και άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του 1

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$