

10.35

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = (2\alpha^4 + 7)x^6 - \alpha^2 x^5 + (\alpha - 1)x^3 - \alpha x - 3$$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως πολωνυμική

$$f(0) = (2\alpha^4 + 7)0^6 - \alpha^2 0^5 + (\alpha - 1)0^3 - \alpha \cdot 0 - 3 = -3 \Rightarrow \boxed{f(0) < 0}$$

$$f(1) = (2\alpha^4 + 7)1^6 - \alpha^2 \cdot 1^5 + (\alpha - 1) \cdot 1^3 - \alpha \cdot 1 - 3 =$$

$$= 2\alpha^4 + 7 - \alpha^2 + \cancel{\alpha} - 1 - \cancel{\alpha} - 3 = 2\alpha^4 - \alpha^2 + 3$$

Είναι $\boxed{f(1) > 0}$ διότι

$2\alpha^4 - \alpha^2 + 3 \stackrel{\text{θέτουμε } y=\alpha^2}{=} 2y^2 - y + 3 > 0$ αφού $\Delta = 1 - 24 = -23 < 0$ και άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του 2

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ και άρα έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα μικρότερη του 1