

10.32

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x - x - 3$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-3, 0]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} f(-3) = e^{-3} - (-3) - 3 = \frac{1}{e^3} > 0 \\ f(0) = e^0 - 0 - 3 = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-3)f(0) < 0$$

Οπότε , από το θεώρημα Bolzano , η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $e^x - x = 3$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(-3, 0)$

Επίσης , η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 3]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = e^0 - 0 - 3 = -2 < 0 \\ f(3) = e^3 - 3 - 3 = e^3 - 6 \stackrel{e > 2 \Rightarrow e^3 > 8}{>} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0)f(3) < 0$$

Οπότε , από το θεώρημα Bolzano , η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $e^x - x = 3$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0, 3)$

Επομένως η εξίσωση $e^x - x = 3$, έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες , μία στο διάστημα $(-3, 0)$ και μία διάστημα $(0, 3)$