

10.31

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - \sin x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} > 0 \\ f(0) = 0^2 - \sin 0 = -1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right)f(0) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^2 = \sin x$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Επίσης, η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^2 - \sin 0 = -1 < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^2 = \sin x$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Επομένως η εξίσωση $x^2 = \sin x$, έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες, μία στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και μία διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$