

10.30

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + x + 2^k - 4$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - 1 + 2^k - 4 = 2^k - 4 \begin{cases} < 0 & k < 2 \Rightarrow 2^k < 4 \\ > 0 & k > 2 \Rightarrow 2^k > 4 \end{cases} \\ f(1) &= 1^2 + 1 + 2^k - 4 = 2^k - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1)f(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^2 + x = 4 - 2^k$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$