

10.28

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [1, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - (x+1) \Rightarrow$

$$h(x) = x^3 - x - 1$$

Αρκεί, να αποδειχτεί ότι, η συνάρτηση h έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(1, \sqrt{2})$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, \sqrt{2}]$, ως πολωνυμική

$$\left. \begin{array}{l} h(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0 \\ h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^3 - \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(1)h(\sqrt{2}) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση h , έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(1, \sqrt{2})$ και άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , με $f(x) = x^3$, με την ευθεία $y = x + 1$, με τετμημένη στο διάστημα $(1, \sqrt{2})$