

10.25 1)

$$f^2(x) = x^2 + 5 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} & , \text{ για κάποια } x \\ -\sqrt{x^2 + 5} & , \text{ για τα υπόλοιπα } x \end{cases} \quad (1)$$

Όμως

Παρατηρούμε ότι η f δεν μηδενίζεται

(διότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 0$, τότε

$$f^2(x) = x^2 + 5 \Rightarrow f^2(x_0) = x_0^2 + 5 \Rightarrow x_0^2 + 5 = 0 \Rightarrow x_0^2 = -5 \text{ άτοπο})$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} f : \text{συνεχής} \\ f : \text{δεν μηδενίζεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \ f \ \text{διατηρεί πρόσημο} \Rightarrow \boxed{f(x) < 0} \quad (2) \ , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \text{και αφού } f(2) = -3$$

Επομένως

$$(1), (2) \Rightarrow \boxed{f(x) = -\sqrt{x^2 + 5}} \ , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

10.25 2)

$$f^2(x) = 2x^2 + 7 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 + 7} & , \text{ για κάποια } x \\ -\sqrt{2x^2 + 7} & , \text{ για τα υπόλοιπα } x \end{cases} \quad (1)$$

Όμως

Παρατηρούμε ότι η f δεν μηδενίζεται

(διότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 0$, τότε

$$f^2(x) = 2x^2 + 7 \Rightarrow f^2(x_0) = 2x_0^2 + 7 \Rightarrow 2x_0^2 + 7 = 0 \Rightarrow 2x_0^2 = -7 \text{ άτοπο})$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} f : \text{συνεχής} \\ f : \text{δεν μηδενίζεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \ f \ \text{διατηρεί πρόσημο} \Rightarrow \boxed{f(x) > 0} \quad (2) \ , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \text{και αφού } f(3) = 5$$

Επομένως

$$(1), (2) \Rightarrow \boxed{f(x) = \sqrt{2x^2 + 7}} \ , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

10.25 3)

$$f^2(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} e^x & , \text{ για κάποια } x \\ -e^x & , \text{ για τα υπόλοιπα } x \end{cases} \quad (1)$$

Όμως

Παρατηρούμε ότι η f δεν μηδενίζεται

(διότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 0$, τότε

$$f^2(x) = e^{2x} \xRightarrow{x=x_0} f^2(x_0) = e^{2x_0} \xRightarrow{f(x_0)=0} e^{2x_0} = 0 \text{ άτοπο})$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} f : \text{συνεχής} \\ f : \text{δεν μηδενίζεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \ f \ \text{διατηρεί πρόσημο} \left. \begin{array}{l} \\ \text{και αφού } f(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f(x) > 0} \quad (2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$$(1), (2) \Rightarrow \boxed{f(x) = e^{2x}}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

10.25 4)

Θέτουμε $h(x) = f(x) - x$. Τότε

$$[f(x) - x]^2 = x^2 + 3 \Rightarrow h^2(x) = x^2 + 3 \Rightarrow h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} & , \text{ για κάποια } x \\ -\sqrt{x^2 + 3} & , \text{ για τα υπόλοιπα } x \end{cases} \quad (1)$$

Όμως

Παρατηρούμε ότι η h δεν μηδενίζεται

(διότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $h(x_0) = 0$, τότε

$$h^2(x) = x^2 + 3 \xRightarrow{x=x_0} h^2(x_0) = x_0^2 + 3 \xRightarrow{h(x_0)=0} x_0^2 + 3 = 0 \Rightarrow x_0^2 = -3 \text{ άτοπο})$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} h : \text{συνεχής} \\ h : \text{δεν μηδενίζεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \ h \ \text{διατηρεί πρόσημο} \left. \begin{array}{l} \\ \text{και αφού } h(1) = f(1) - 1 \stackrel{f(1)<0}{< 0} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{h(x) < 0} \quad (2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$$(1), (2) \Rightarrow h(x) = -\sqrt{x^2 + 3} \Rightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 + 3} \Rightarrow \boxed{f(x) = x - \sqrt{x^2 + 3}}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

10.25 5)

Θέτουμε $h(x) = f(x) - 2x$. Τότε

$$[f(x) - 2x]^2 = 4x^2 + 5 \Rightarrow h^2(x) = 4x^2 + 5 \Rightarrow$$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 5} & , \text{ για κάποια } x \\ -\sqrt{4x^2 + 5} & , \text{ για τα υπόλοιπα } x \end{cases} \quad (1)$$

Όμως

Παρατηρούμε ότι η h δεν μηδενίζεται

(διότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $h(x_0) = 0$, τότε

$$h^2(x) = 4x^2 + 5 \xRightarrow{x=x_0} h^2(x_0) = 4x_0^2 + 5 \xRightarrow{h(x_0)=0} 4x_0^2 + 5 = 0 \Rightarrow 4x_0^2 = -5 \text{ άτοπο})$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} h: \text{συνεχής} \\ h: \text{δεν μηδενίζεται} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \ h \ \text{διατηρεί πρόσημο} \left\{ \begin{array}{l} \\ \text{και αφού } h(-2) = f(-2) + 4 \overset{f(-2) > 0}{> 0} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{h(x) > 0} \text{ (2) , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$$(1), (2) \Rightarrow h(x) = \sqrt{4x^2 + 5} \Rightarrow f(x) - 2x = \sqrt{4x^2 + 5} \Rightarrow \boxed{f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 5}} \text{ , για } \text{κάθε } x \in \mathbb{R}$$