

10.24 1)

α) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται

Πράγματι

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f(x_0) = 0$. Τότε

$$f(x)g(x) = e^x + 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f(x_0)g(x_0) = e^{x_0} + 1 \xrightarrow{f(x_0)=0} 0 = e^{x_0} + 1 \Rightarrow e^{x_0} = -1 \text{ άτοπο}$$

Άρα η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{η } f \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}}$$

Ομοίως

Θα αποδείξουμε ότι η και η συνάρτηση g δεν μηδενίζεται

Πράγματι

Έστω ότι υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$, με $g(x_1) = 0$. Τότε

$$f(x)g(x) = e^x + 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_1} f(x_1)g(x_1) = e^{x_1} + 1 \xrightarrow{g(x_1)=0} 0 = e^{x_1} + 1 \Rightarrow e^{x_1} = -1 \text{ άτοπο}$$

Άρα και η συνάρτηση g δεν μηδενίζεται. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ g(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{η } g \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}}$$

β) Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ διατηρεί πρόσημο στο } \mathbb{R} \\ f(2) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}}$$

Ακόμη

$$f(x)g(x) = e^x + 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=2} f(2)g(2) = e^2 + 1 \xrightarrow{f(2)>0 \Rightarrow f(2) \neq 0} g(2) = \frac{e^2 + 1}{f(2)} \xrightarrow{\frac{e^2 + 1}{f(2)} > 0} g(2) > 0$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \text{η } g \text{ διατηρεί πρόσημο στο } \mathbb{R} \\ g(2) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{g(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}}$$

10.24 2)

α) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται

Πράγματι

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f(x_0) = 0$. Τότε

$$f(x)g(x) = -x^2 - 2 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f(x_0)g(x_0) = -x_0^2 - 2 \xrightarrow{f(x_0)=0} \Rightarrow 0 = -x_0^2 - 2 \Rightarrow x_0^2 = -2 \text{ άτοπο}$$

$$\Rightarrow 0 = -x_0^2 - 2 \Rightarrow x_0^2 = -2 \text{ άτοπο}$$

Άρα η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{η } f \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}}$$

Ομοίως

Θα αποδείξουμε ότι η και η συνάρτηση g δεν μηδενίζεται

Πράγματι

Έστω ότι υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$, με $g(x_1) = 0$. Τότε

$$f(x)g(x) = -x^2 - 2 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_1} f(x_1)g(x_1) = -x_1^2 - 2 \xrightarrow{f(x_1)=0}$$

$$\Rightarrow 0 = -x_1^2 - 2 \Rightarrow x_1^2 = -2 \text{ \underline{άτοπο}}$$

Άρα και η συνάρτηση g δεν μηδενίζεται. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ g(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{η } g \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}}$$

β) Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ διατηρεί πρόσημο στο } \mathbb{R} \\ f(2) = 5 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}}$$

Ακόμη

$$f(x)g(x) = -x^2 - 2 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=2} f(2)g(2) = -2^2 - 2 \xrightarrow{f(2)=5} 5g(2) = -6 \Rightarrow g(2) = -\frac{6}{5} < 0$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \text{η } g \text{ διατηρεί πρόσημο στο } \mathbb{R} \\ g(2) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{g(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}}$$

10.24 3)

α) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται

Πράγματι

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f(x_0) = 0$. Τότε

$$f(x) = (-x^2 - x - 1)g(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f(x_0) = (-x_0^2 - x_0 - 1)g(x_0) \xrightarrow{f(x_0)=0}$$

$$\Rightarrow 0 = (-x_0^2 - x_0 - 1)g(x_0) \xrightarrow{-x_0^2 - x_0 - 1 \neq 0 \text{ διότι } \Delta < 0} g(x_0) = 0 \text{ \underline{άτοπο} διότι τότε θα ήταν}$$

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

Άρα η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{η } f \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}}$$

Ομοίως

Θα αποδείξουμε ότι η και η συνάρτηση g δεν μηδενίζεται

Πράγματι

Έστω ότι υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$, με $g(x_1) = 0$. Τότε

$$f(x) = (-x^2 - x - 1)g(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_1} f(x_1) = (-x_1^2 - x_1 - 1)g(x_1) \xrightarrow{g(x_1)=0}$$

$$\Rightarrow f(x_1) = 0 \text{ \underline{άτοπο} διότι τότε θα ήταν } f(x_1) = g(x_1) = 0$$

Άρα και η συνάρτηση g δεν μηδενίζεται. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ g(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{η } g \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}}$$

β) Έχουμε ότι

$$f(x) = (-x^2 - x - 1)g(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1} f(1) = -3g(1)$$

$$\text{Οπότε } f(1) + g(1) = -4 \xrightarrow{f(1)=-3g(1)} -3g(1) + g(1) = -4 \Rightarrow -4g(1) = -4 \Rightarrow g(1) = 1$$

Άρα

$$\left. \begin{array}{l} \text{η } g \text{ διατηρεί πρόσημο στο } \mathbb{R} \\ g(1) = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{g(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}}$$

Ακόμη

$$f(1) = -3g(1) \xrightarrow{g(1)=1} f(1) = -3$$

Επομένως

$$\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ διατηρεί πρόσημο στο } \mathbb{R} \\ f(1) = -3 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}}$$