

## 10.23 1)

α) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν μηδενίζεται

Πράγματι

Έστω ότι υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}$ , με  $f(x_0) = 0$ . Τότε

$$f^3(x) + f(x) = x^2 + e^{f(x)} \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f^3(x_0) + f(x_0) = x_0^2 + e^{f(x_0)} \xrightarrow{f(x_0)=0} \\ \Rightarrow 0 = x_0^2 + e^0 \Rightarrow x_0^2 = -1 \text{ άτοπο}$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  δεν μηδενίζεται. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}$$

β) Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ διατηρεί πρόσημο στο } \mathbb{R} \\ f(5) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}}$$

## 10.23 2)

α) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν μηδενίζεται στο διάστημα  $(-2, 2)$

Πράγματι

Έστω ότι υπάρχει  $x_0 \in (-2, 2)$ , με  $f(x_0) = 0$ . Τότε

$$2x^2 + 3[f(x)]^2 = 8 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} 2x_0^2 + 3f^2(x_0) = 8 \xrightarrow{f(x_0)=0} \\ \Rightarrow 2x_0^2 = 8 \Rightarrow x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = \pm 2 \text{ άτοπο (διότι } x_0 \in (-2, 2))$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  δεν μηδενίζεται. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } (-2, 2) \\ f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (-2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{η } f \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } (-2, 2)}$$

β) Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ διατηρεί πρόσημο στο } (-2, 2) \\ f(1) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (-2, 2)}$$

## 10.23 3)

α) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν μηδενίζεται στο  $\mathbb{R}$

Πράγματι

Έστω ότι υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}$ , με  $f(x_0) = 0$ . Προφανώς  $x_0 \neq 0$  αφού  $f(0) = 2$ . Τότε

$$f^2(x) - 2f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f^2(x_0) - 2f(x_0) = x_0^2 \xrightarrow{f(x_0)=0} x_0^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \\ \text{άτοπο (διότι } x_0 \neq 0)$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  δεν μηδενίζεται. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{η } f \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}}$$

β) Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ διατηρεί πρόσημο στο } \mathbb{R} \\ f(0) = 2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}}$$

## 10.23 4)

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν μηδενίζεται

Πράγματι

Έστω ότι υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}$ , με  $f(x_0) = 0$ . Τότε

$$f(x)g(x) \geq 1 - f(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f(x_0)g(x_0) \geq 1 - f(x_0) \xrightarrow{f(x_0)=0} 0 \geq 1 \quad \underline{\text{άτοπο}}$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  δεν μηδενίζεται. Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{η } f \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}}$$