

10.22 1)

- α) Παραγοντοποιούμε με σχήμα Horner την $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ (ρίζα το $x_0 = 1$) και έχουμε $f(x) = (x-1)(x+2)(x-4)$

οπότε οι ρίζες της είναι οι $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$

- β) Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και οι ρίζες της είναι οι $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$. Οπότε στα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 4)$ και $(4, +\infty)$, η f δεν μηδενίζεται οπότε διατηρεί πρόσημο

Για να βρούμε το πρόσημο που έχει σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαστήματα βρίσκουμε την τιμή της f σε κάποιο τυχαίο σημείο του διαστήματος

Έτσι

Για το διάστημα $(-\infty, -2)$ είναι πχ $f(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 - 6(-3) + 8 = -28 < 0$

και άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -2)$

Για το διάστημα $(-2, 1)$ είναι πχ

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 = 8 > 0$$

και άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-2, 1)$

Για το διάστημα $(1, 4)$ είναι πχ

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = -8 < 0$$

και άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$

Για το διάστημα $(4, +\infty)$ είναι πχ

$$f(5) = 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 28 > 0$$

και άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (4, +\infty)$

Ο πίνακας προσήμων της f είναι ο παρακάτω

x	$-\infty$	-2		1		4	$+\infty$
f(x)	-	0	+	0	-	0	+

10.22 2)

- α) Παραγοντοποιούμε την $f(x) = x^4 + x^3 - 6x^2$ και έχουμε

$$\Delta = 1 + 24 = 25, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \\ x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2(x^2 + x - 6) = x^2(x+3)(x-2)$$

οπότε οι ρίζες της είναι οι $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$

β) Η f είναι συνεχής ως πολωνυμική και οι ρίζες της είναι οι $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. Οπότε στα διαστήματα $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$, $(0, 2)$ και $(2, +\infty)$, η f δεν μηδενίζεται οπότε διατηρεί πρόσημο

Για να βρούμε το πρόσημο που έχει σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαστήματα βρίσκουμε την τιμή της f σε κάποιο τυχαίο σημείο του διαστήματος

Έτσι

Για το διάστημα $(-\infty, -3)$ είναι $\pi\chi$

$$f(-4) = (-4)^4 + (-4)^3 - 6(-4)^2 = 96 > 0$$

και άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -3)$

Για το διάστημα $(-3, 0)$ είναι $\pi\chi$

$$f(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 6(-1)^2 = -6 < 0$$

και άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-3, 0)$

Για το διάστημα $(0, 2)$ είναι $\pi\chi$

$$f(1) = 1^4 + 1^3 - 6 \cdot 1^2 = -4 < 0$$

και άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$

Για το διάστημα $(2, +\infty)$ είναι $\pi\chi$

$$f(3) = 3^4 + 3^3 - 6 \cdot 3^2 = 64 > 0$$

και άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$

Ο πίνακας προσήμων της f είναι ο παρακάτω

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$f(x)$	+	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	+

10.22 3)

α) Παραγοντοποιούμε την $f(x) = \ln^3 x - \ln x$ και έχουμε

$$f(x) = \ln^3 x - \ln x = \ln x (\ln^2 x - 1) = \ln x (\ln x - 1)(\ln x + 1)$$

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Rightarrow \ln x (\ln x - 1)(\ln x + 1) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \text{ ή } \ln x = 1 \text{ ή } \ln x = -1$$

$$x = 1 \text{ ή } \ln x = e \text{ ή } x = \frac{1}{e}$$

$$\text{οπότε οι ρίζες της είναι οι } x_1 = \frac{1}{e}, x_2 = 1, x_3 = e$$

β) Η f είναι συνεχής, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, και οι ρίζες της είναι οι

$$x_1 = \frac{1}{e}, x_2 = 1, x_3 = e. \text{ Οπότε στα διαστήματα } \left(0, \frac{1}{e}\right), \left(\frac{1}{e}, 1\right), (1, e) \text{ και}$$

$(e, +\infty)$, η f δεν μηδενίζεται οπότε διατηρεί πρόσημο

Για να βρούμε το πρόσημο που έχει σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαστήματα βρίσκουμε την τιμή της f σε κάποιο τυχαίο σημείο του διαστήματος

Έτσι

Για το διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ είναι $\pi\chi$

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln \frac{1}{e^2} \left(\ln \frac{1}{e^2} - 1 \right) \left(\ln \frac{1}{e^2} + 1 \right) = -2(-2-1)(-2+1) = -6 < 0$$

και άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$

Για το διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ είναι $\pi\chi$

$$f\left(\frac{2}{e}\right) = \ln \frac{2}{e} \left(\ln \frac{2}{e} - 1 \right) \left(\ln \frac{2}{e} + 1 \right) =$$

$$= (\ln 2 - 1)(\ln 2 - 1 - 1)(\ln 2 - 1 + 1) = (\ln 2 - 1)(\ln 2 - 2) \ln 2 \stackrel{0 < \ln 2 < 1}{>} 0$$

και άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$

Για το διάστημα $(1, e)$ είναι $\pi\chi$

$$f(2) = \ln 2 (\ln 2 - 1) (\ln 2 + 1) \stackrel{0 < \ln 2 < 1}{<} 0$$

και άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, e)$

Για το διάστημα $(e, +\infty)$ είναι $\pi\chi$

$$f(e^2) = \ln e^2 (\ln e^2 - 1) (\ln e^2 + 1) = 2(2-1)(2+1) = 6 > 0$$

και άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (e, +\infty)$

Ο πίνακας προσήμων της f είναι ο παρακάτω

x	0	$\frac{1}{e}$	1	e	$+\infty$		
f(x)	-	0	+	0	-	0	+