

10.21 1)

Επειδή $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow [-\alpha, \alpha]$, θα είναι $-\alpha \leq f(x) \leq \alpha$, για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - x$, $x \in [-\alpha, \alpha]$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(-\alpha) = f(-\alpha) + \alpha \geq 0 \\ h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{h(-\alpha)h(\alpha) \leq 0}$$

Αν $h(-\alpha) = 0$ τότε για $x_0 = -\alpha \in [-\alpha, \alpha]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(\alpha) = 0$ τότε για $x_0 = \alpha \in [-\alpha, \alpha]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(-\alpha) \neq 0$ και $h(\alpha) \neq 0$ τότε προφανώς $h(-\alpha)h(\alpha) < 0$, οπότε από το θεώρημα

Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$ (άρα $x_0 \in [-\alpha, \alpha]$) τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [-\alpha, \alpha]$ τέτοιο ώστε

$h(x_0) = 0$. Δηλαδή , η συνάρτηση h , έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$

και άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , με την ευθεία $y = x$, με τετμημένη στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$

10.21 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - x$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(-\alpha) = f(-\alpha) + \alpha \geq 0 \\ h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{h(-\alpha)h(\alpha) \leq 0}$$

Αν $h(-\alpha) = 0$ τότε για $x_0 = -\alpha \in [-\alpha, \alpha]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(\alpha) = 0$ τότε για $x_0 = \alpha \in [-\alpha, \alpha]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(-\alpha) \neq 0$ και $h(\alpha) \neq 0$ τότε προφανώς $h(-\alpha)h(\alpha) < 0$, οπότε από το θεώρημα

Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$ (άρα $x_0 \in [-\alpha, \alpha]$) τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [-\alpha, \alpha]$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x_0) = x_0}$$

10.21 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) + x$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(-\alpha) = f(-\alpha) - \alpha \leq 0 \\ h(\alpha) = f(\alpha) + \alpha \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{h(-\alpha)h(\alpha) \leq 0}$$

Αν $h(-\alpha) = 0$ τότε για $x_0 = -\alpha \in [-\alpha, \alpha]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(\alpha) = 0$ τότε για $x_0 = \alpha \in [-\alpha, \alpha]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(-\alpha) \neq 0$ και $h(\alpha) \neq 0$ τότε προφανώς $h(-\alpha)h(\alpha) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$ (άρα $x_0 \in [-\alpha, \alpha]$) τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [-\alpha, \alpha]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x_0) = -x_0}$

10.21 4)

Επειδή $f: [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$, θα είναι $-2 \leq f(x) \leq 2$, για κάθε $x \in [-2, 2]$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - x$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(-2) = f(-2) + 2 \geq 0 \\ h(2) = f(2) - 2 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{h(-2)h(2) \leq 0}$$

Αν $h(-2) = 0$ τότε για $x_0 = -2 \in [-2, 2]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(2) = 0$ τότε για $x_0 = 2 \in [-2, 2]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(-2) \neq 0$ και $h(2) \neq 0$ τότε προφανώς $h(-2)h(2) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-2, 2)$ (άρα $x_0 \in [-2, 2]$) τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [-2, 2]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x_0) = x_0}$

10.21 5)

Επειδή $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$, θα είναι $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - g(x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \geq 0 \\ h(\beta) = f(\beta) - g(\beta) = f(\beta) - \beta \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{h(\alpha)h(\beta) \leq 0}$$

Αν $h(\alpha) = 0$ τότε για $x_0 = \alpha \in [\alpha, \beta]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(\beta) = 0$ τότε για $x_0 = \beta \in [\alpha, \beta]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(\alpha) \neq 0$ και $h(\beta) \neq 0$ τότε προφανώς $h(\alpha)h(\beta) < 0$, οπότε από το θεώρημα

Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ (άρα $x_0 \in [\alpha, \beta]$) τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$h(x_0) = 0$. Δηλαδή η συνάρτηση h , άρα και η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μια τουλάχιστο πραγματική ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

10.21 6)

Επειδή $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$, θα είναι $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = xf(x) - \alpha\beta$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= \alpha f(\alpha) - \alpha\beta = \alpha[f(\alpha) - \beta] \\ h(\beta) &= \beta f(\beta) - \alpha\beta = \beta[f(\beta) - \alpha] \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) \cdot h(\beta) = \alpha\beta[f(\alpha) - \beta][f(\beta) - \alpha] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha, \beta: \text{ομόσημοι} &\Rightarrow \alpha\beta \geq 0 \\ \alpha \leq f(x) \leq \beta &\Rightarrow \begin{cases} f(\alpha) - \beta \leq 0 \\ f(\beta) - \alpha \geq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow &\boxed{h(\alpha) \cdot h(\beta) \leq 0} \end{aligned}$$

Αν $h(\alpha) = 0$ τότε για $\gamma = \alpha \in [\alpha, \beta]$ έχουμε $h(\gamma) = 0$

Αν $h(\beta) = 0$ τότε για $\gamma = \beta \in [\alpha, \beta]$ έχουμε $h(\gamma) = 0$

Αν $h(\alpha) \neq 0$ και $h(\beta) \neq 0$ τότε προφανώς $h(\alpha)h(\beta) < 0$, οπότε από το θεώρημα

Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (\alpha, \beta)$ (άρα $\gamma \in [\alpha, \beta]$) τέτοιο ώστε $h(\gamma) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $\gamma \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$h(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma f(\gamma) - \alpha\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma f(\gamma) = \alpha\beta}$$