

10.20 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - g(x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a) \\ h(b) &= f(b) - g(b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{f(a)+f(b)=g(a)+g(b) \Rightarrow}{f(b)-g(b)=g(a)-f(a)} \\ &= g(a) - f(a) = -[f(a) - g(a)] \end{aligned}$$

$$h(a) \cdot h(b) = -[f(a) - g(a)]^2 \Rightarrow \boxed{h(a) \cdot h(b) \leq 0}$$

Αν $h(a) = 0$ τότε για $x_0 = a \in [a, b]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(b) = 0$ τότε για $x_0 = b \in [a, b]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(a) \neq 0$ και $h(b) \neq 0$ τότε προφανώς $h(a)h(b) < 0$, οπότε από το θεώρημα

Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ (άρα $x_0 \in [a, b]$) τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$h(x_0) = 0$. Δηλαδή η συνάρτηση h , άρα και η εξίσωση $f(x) - g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα $[a, b]$

10.20 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - g(x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= f(0) - g(0) \\ h(1) &= f(1) - g(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{f(1)=g(0)}{g(1)=f(0)} \\ &= g(0) - f(0) = -[f(0) - g(0)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(0)h(1) = -[f(0) - g(0)]^2 \Rightarrow \boxed{h(0)h(1) \leq 0}$$

Αν $h(0) = 0$ τότε για $x_0 = 0 \in [0, 1]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(1) = 0$ τότε για $x_0 = 1 \in [0, 1]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(0) \neq 0$ και $h(1) \neq 0$ τότε προφανώς $h(0)h(1) < 0$, οπότε από το θεώρημα

Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ (άρα $x_0 \in [0, 1]$) τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x_0) = g(x_0)}$$

10.20 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - g(x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= f(\alpha) - g(\alpha) = g(\beta) - g(\alpha) \\ h(\beta) &= f(\beta) - g(\beta) \stackrel{f(\beta)=g(\alpha)}{=} g(\alpha) - g(\beta) = -[g(\beta) - g(\alpha)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\alpha)h(\beta) = -[g(\beta) - g(\alpha)]^2 \Rightarrow \boxed{h(\alpha)h(\beta) \leq 0}$$

Αν $h(\alpha) = 0$ τότε για $x_0 = \alpha \in [\alpha, \beta]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(\beta) = 0$ τότε για $x_0 = \beta \in [\alpha, \beta]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(\alpha) \neq 0$ και $h(\beta) \neq 0$ τότε προφανώς $h(\alpha)h(\beta) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ (άρα $x_0 \in [\alpha, \beta]$) τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(x_0) = g(x_0)}$

10.20 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - f(x + \pi)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= f(0) - f(\pi) \\ h(\pi) &= f(\pi) - f(2\pi) \stackrel{f(2\pi)=f(0)}{=} f(\pi) - f(0) = -[f(0) - f(\pi)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(0) \cdot h(\pi) = -[f(0) - f(\pi)]^2 \Rightarrow \boxed{h(0) \cdot h(\pi) \leq 0}$$

Αν $h(0) = 0$ τότε για $x_0 = 0 \in [0, \pi]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(\pi) = 0$ τότε για $x_0 = \pi \in [0, \pi]$ έχουμε $h(x_0) = 0$

Αν $h(0) \neq 0$ και $h(\pi) \neq 0$ τότε προφανώς $h(0)h(\pi) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \pi)$ (άρα $x_0 \in [0, \pi]$) τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - f(x_0 + \pi) = 0 \Rightarrow \boxed{f(x_0) = f(x_0 + \pi)}$

10.20 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = (\alpha + \beta) \cdot f(x) - \alpha f(\alpha) - \beta f(\beta)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= (\alpha + \beta) \cdot f(\alpha) - \alpha f(\alpha) - \beta f(\beta) = \cancel{\alpha f(\alpha)} + \beta f(\alpha) - \cancel{\alpha f(\alpha)} - \beta f(\beta) \\ h(\beta) &= (\alpha + \beta) \cdot f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \beta f(\beta) = \alpha \cdot f(\beta) + \cancel{\beta f(\beta)} - \alpha f(\alpha) - \cancel{\beta f(\beta)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= \beta[f(\alpha) - f(\beta)] \\ h(\beta) &= \alpha[f(\beta) - f(\alpha)] = -\alpha[f(\alpha) - f(\beta)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\alpha)h(\beta) = -\alpha\beta[f(\alpha) - f(\beta)]^2 \stackrel{\alpha, \beta: \text{ομόσημοι}}{\Rightarrow} \boxed{h(\alpha)h(\beta) \leq 0}$$

Αν $h(\alpha) = 0$ τότε για $\gamma = \alpha \in [\alpha, \beta]$ έχουμε $h(\gamma) = 0$

Αν $h(\beta) = 0$ τότε για $\gamma = \beta \in [\alpha, \beta]$ έχουμε $h(\gamma) = 0$

Αν $h(\alpha) \neq 0$ και $h(\beta) \neq 0$ τότε προφανώς $h(\alpha)h(\beta) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (\alpha, \beta)$ (άρα $\gamma \in [\alpha, \beta]$) τέτοιο ώστε $h(\gamma) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $\gamma \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$h(\gamma) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta) \cdot f(\gamma) - \alpha f(\alpha) - \beta f(\beta) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha f(\alpha) + \beta f(\beta) = (\alpha + \beta) \cdot f(\gamma)}$$