

10.19 1)

Επειδή $f : [0,1] \rightarrow (0,1)$, θα είναι $0 < f(x) < 1$, για κάθε $x \in [0,1]$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - x$

Αρκεί , να αποδειχτεί ότι , η συνάρτηση h έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0 \\ h(1) = f(1) - 1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(0)h(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση h , έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$ και άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , με την ευθεία $y = x$, με τετμημένη στο διάστημα $(0,1)$

10.19 2)

Επειδή $f : [1,2] \rightarrow (2,4)$, θα είναι $2 < f(x) < 4$, για κάθε $x \in [1,2]$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h : [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = xf(x) - 4$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(1) = f(1) - 4 < 0 \\ h(2) = 2f(2) - 4 = 2[f(2) - 2] > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(1)h(2) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow \xi f(\xi) - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\xi f(\xi) = 4}$$

10.19 3)

Επειδή $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow (-\alpha, \alpha)$, θα είναι $-\alpha < f(x) < \alpha$, για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = x + f(x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(-\alpha) = -\alpha + f(-\alpha) < 0 \\ h(\alpha) = \alpha + f(\alpha) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(-\alpha)h(\alpha) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\beta \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο ώστε

$$h(\beta) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta + f(\beta) = 0}$$

10.19 4)

Επειδή $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 1)$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty)$, θα είναι $f(x) < 1$ και $g(x) > 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) \cdot g(x) - x$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= f(\alpha) \cdot g(\alpha) - \alpha \stackrel{f(\alpha)=\alpha}{=} \alpha \cdot g(\alpha) - \alpha = \alpha \cdot [g(\alpha) - 1] \\ h(\beta) &= f(\beta) \cdot g(\beta) - \beta \stackrel{g(\beta)=\beta}{=} \beta \cdot f(\beta) - \beta = \beta \cdot [f(\beta) - 1] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\alpha)h(\beta) = \alpha\beta \cdot [g(\alpha) - 1][f(\beta) - 1] \stackrel{\substack{\alpha, \beta: \text{ομόσημοι} \Rightarrow \alpha\beta > 0 \\ g(x) > 1 \Rightarrow g(\alpha) - 1 > 0 \\ f(x) < 1 \Rightarrow f(\beta) - 1 < 0}}{<} 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) \cdot g(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow \boxed{f(x_0) \cdot g(x_0) = x_0}$$

10.19 5)

Επειδή $f: [0, 1] \rightarrow (-1, 0)$, θα είναι $-1 < f(x) < 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$

Η συνάρτηση g

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= f^2(0) + f(0) = f(0)[f(0) + 1] \stackrel{\substack{-1 < f(x) < 0 \Rightarrow \\ f(0) < 0 \text{ και } f(0)+1 > 0}}{<} 0 \\ g(1) &= f^2(1) + f(1) + 1 \stackrel{\substack{\text{Αν } y=f(1) \text{ τότε} \\ f^2(1)+f(1)+1=y^2+y+1 > 0 \text{ διότι } \Delta=-3 < 0}}{>} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(0) \cdot g(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση g , έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ και άρα έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, με τετμημένη στο διάστημα $(0, 1)$