

10.18 1)

Έχουμε ισοδύναμα

$$f(\gamma) = \frac{\kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta)}{\kappa + \lambda} \Leftrightarrow (\kappa + \lambda)f(\gamma) = \kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + \lambda)f(\gamma) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta) = 0$$

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = (\kappa + \lambda)f(x) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta)$$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= (\kappa + \lambda)f(\alpha) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta) = \cancel{\kappa f(\alpha)} + \lambda f(\alpha) - \cancel{\kappa f(\alpha)} - \lambda f(\beta) \\ h(\beta) &= (\kappa + \lambda)f(\beta) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta) = \kappa f(\beta) + \cancel{\lambda f(\beta)} - \kappa f(\alpha) - \cancel{\lambda f(\beta)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} h(\alpha) &= \lambda[f(\alpha) - f(\beta)] \\ h(\beta) &= \kappa[f(\beta) - f(\alpha)] = -\kappa[f(\alpha) - f(\beta)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\alpha)h(\beta) = -\kappa\lambda[f(\alpha) - f(\beta)]^2 \stackrel{f(\alpha) \neq f(\beta)}{<} 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h(\gamma) = 0 \Rightarrow (\kappa + \lambda)f(\gamma) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta) = 0 \Rightarrow \boxed{f(\gamma) = \frac{\kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta)}{\kappa + \lambda}}$$

10.18 2)

Έχουμε ισοδύναμα

$$f(\xi) = \frac{\kappa f(\alpha) + 2f(\beta)}{\kappa + 2} \Leftrightarrow (\kappa + 2)f(\xi) = \kappa f(\alpha) + 2f(\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + 2)f(\xi) - \kappa f(\alpha) - 2f(\beta) = 0$$

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = (\kappa + 2)f(x) - \kappa f(\alpha) - 2f(\beta)$$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= (\kappa + 2)f(\alpha) - \kappa f(\alpha) - 2f(\beta) = \cancel{\kappa f(\alpha)} + 2f(\alpha) - \cancel{\kappa f(\alpha)} - 2f(\beta) \\ h(\beta) &= (\kappa + 2)f(\beta) - \kappa f(\alpha) - 2f(\beta) = \kappa f(\beta) + \cancel{2f(\beta)} - \kappa f(\alpha) - \cancel{2f(\beta)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} h(\alpha) &= 2[f(\alpha) - f(\beta)] \\ h(\beta) &= \kappa[f(\beta) - f(\alpha)] = -\kappa[f(\alpha) - f(\beta)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\alpha)h(\beta) = -2\kappa[f(\alpha) - f(\beta)]^2 \stackrel{f(\alpha) \neq f(\beta)}{<} 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow (\kappa + 2)f(\gamma) - \kappa f(\alpha) - 2f(\beta) = 0 \Rightarrow \boxed{f(\xi) = \frac{\kappa f(\alpha) + 2f(\beta)}{\kappa + 2}}$$

10.18 3)

Έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow (\beta - \alpha)f(\xi) = (\xi - \alpha)[f(\alpha) + f(\beta)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\beta - \alpha)f(\xi) - (\xi - \alpha)[f(\alpha) + f(\beta)] = 0$$

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = (\beta - \alpha)f(x) - (x - \alpha)[f(\alpha) + f(\beta)]$$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= (\beta - \alpha)f(\alpha) - (\alpha - \alpha)[f(\alpha) + f(\beta)] \\ h(\beta) &= (\beta - \alpha)f(\beta) - (\beta - \alpha)[f(\alpha) + f(\beta)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} h(\alpha) &= (\beta - \alpha)f(\alpha) \\ h(\beta) &= (\beta - \alpha)[\cancel{f(\beta)} - f(\alpha) - \cancel{f(\beta)}] = -(\beta - \alpha)f(\alpha) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\alpha)h(\beta) = -(\beta - \alpha)^2 \overset{\substack{f(\alpha) \neq 0 \\ \alpha \neq \beta}}{f^2(\alpha)} < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow (\beta - \alpha)f(\xi) - (\xi - \alpha)[f(\alpha) + f(\beta)] = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha}}$$