

10.17 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(2x) - f(x) + x - 1$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= \cancel{f(0)} - \cancel{f(0)} + 0 - 1 = -1 < 0 \\ h(1) &= f(2 \cdot 1) - f(1) + 1 - 1 = f(2) - f(1) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} f(2) > f(1) \\ > 0 \end{array} \Rightarrow h(0)h(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow f(2\xi) - f(\xi) + \xi - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{f(2\xi) - f(\xi) = 1 - \xi}$$

10.17 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x+2) + x - f(4-x) - 2$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(1) &= \cancel{f(3)} + 1 - \cancel{f(3)} - 2 = -1 < 0 \\ h(2) &= f(4) + 2 - f(2) - 2 = f(4) - f(2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} f(4) > f(2) \\ > 0 \end{array} \Rightarrow h(1)h(2) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$\xi \in (1,2)$, τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi+2) + \xi - f(4-\xi) - 2 = 0 \Rightarrow f(\xi+2) + \xi = f(4-\xi) + 2$$

10.17 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [1,e] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(\ln x) - \ln x$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(1) &= f(\ln 1) - \ln 1 = f(0) - 0 \\ h(e) &= f(\ln e) - \ln e = f(1) - 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} f(0) > 0 \\ f(1) < 1 \end{array} \Rightarrow h(1)h(e) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,e)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Rightarrow f(\ln x_0) - \ln x_0 = 0 \Rightarrow \boxed{f(\ln x_0) = \ln x_0}$$