

10.15 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - f(x+1)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= f(0) - f(1) \stackrel{f(0)=f(2)}{=} f(2) - f(1) \\ h(1) &= f(1) - f(2) = -[f(2) - f(1)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(0)h(1) = -[f(2) - f(1)]^2 \stackrel{f(1) \neq f(2)}{<} 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) - f(\xi+1) = 0 \Rightarrow \boxed{f(\xi) = f(\xi+1)}$$

10.15 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - f(2x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(1) &= f(1) - f(2) \stackrel{f(1)=f(4)}{=} f(4) - f(2) \\ h(2) &= f(2) - f(4) = -[f(4) - f(2)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(1)h(2) = -[f(4) - f(2)]^2 \stackrel{f(2) \neq f(4)}{<} 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) - f(2\xi) = 0 \Rightarrow \boxed{f(\xi) = f(2\xi)}$$

10.15 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - g(x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= f(\alpha) - g(\alpha) \stackrel{f(\alpha)=g(\beta)}{=} g(\beta) - g(\alpha) \\ h(\beta) &= f(\beta) - g(\beta) \stackrel{f(\beta)=g(\alpha)}{=} g(\alpha) - g(\beta) = -[g(\beta) - g(\alpha)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\alpha)h(\beta) = -[g(\beta) - g(\alpha)]^2 \stackrel{g(\alpha) \neq g(\beta)}{<} 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Rightarrow \boxed{f(x_0) = g(x_0)}$$

που σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστο κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$