

10.14 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - g(x)$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\bullet \left. \begin{array}{l} h(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) \stackrel{f(\alpha) > g(\alpha)}{>} 0 \\ h(\beta) = f(\beta) - g(\beta) \stackrel{f(\beta) < g(\beta)}{<} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha)h(\beta) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) - g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = g(\xi)$$

10.14 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - g(x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = f(0) - g(0) \stackrel{f(0) < g(0)}{<} 0 \\ h(1) = f(1) - g(1) \stackrel{f(1) > g(1)}{>} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(0)h(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$h(c) = 0 \Rightarrow f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow \boxed{f(c) = g(c)}$$

10.14 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = x + f(x) - \alpha - \beta$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{array}{l} h(\alpha) = \cancel{\alpha} + f(\alpha) - \cancel{\alpha} - \beta \stackrel{f(\alpha)=\alpha}{=} \alpha - \beta \stackrel{\text{προφανώς } \alpha < \beta}{<} 0 \\ h(\beta) = \beta + f(\beta) - \alpha - \cancel{\beta} \stackrel{f(\beta)=\beta}{=} \beta - \alpha \stackrel{\text{προφανώς } \alpha < \beta}{>} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha)h(\beta) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 + f(x_0) - \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 + f(x_0) = \alpha + \beta}$$