

10.13 1)

$$\frac{x^6+1}{x-3} + \frac{x^2+1}{x-1} = 0 \quad \text{πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(x-3)}(x-1)\frac{x^6+1}{\cancel{x-3}} + (x-3)\cancel{(x-1)}\frac{x^2+1}{\cancel{x-1}} = 0 \cdot (x-3)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^6+1) + (x-3)(x^2+1) = 0$$

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = (x-1)(x^6+1) + (x-3)(x^2+1)$$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= (1-1)(1^6+1) + (1-3)(1^2+1) = -4 < 0 \\ f(3) &= (3-1)(3^6+1) + (3-3)(3^2+1) = 2(3^6+1) > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1)f(3) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστο μία ρίζα ρ στο διάστημα $(1, 3)$ και επειδή προφανώς $\rho \neq 1$ και $\rho \neq 3$ η ρίζα αυτή θα είναι και

$$\text{ρίζα της εξίσωσης } \frac{x^6+1}{x-3} + \frac{x^2+1}{x-1} = 0$$

10.13 2)

$$\frac{x^6+2}{x+1} + \frac{x^2+1}{x} = 0 \quad \text{πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \cancel{(x+1)}\frac{x^6+2}{\cancel{x+1}} + \cancel{x} \cdot (x+1)\frac{x^2+1}{\cancel{x}} = 0 \cdot x \cdot (x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^6+2) + (x+1)(x^2+1) = 0$$

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x(x^6+2) + (x+1)(x^2+1)$$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)[(-1)^6+2] + [(-1)+1][(-1)^2+1] = -3 < 0 \\ f(0) &= 0(0^6+2) + (0+1)(0^2+1) = 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1)f(0) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστο μία ρίζα ρ στο διάστημα $(-1, 0)$ και επειδή προφανώς $\rho \neq -1$ και $\rho \neq 0$ η ρίζα αυτή θα είναι και

$$\text{ρίζα της εξίσωσης } \frac{x^6+2}{x+1} + \frac{x^2+1}{x} = 0$$

10.13 3)

$$\frac{x^4+3}{x-1} + \frac{x^2}{x-2} = 0 \quad \text{πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ} \quad \Leftrightarrow$$

$$\cancel{(x-1)}(x-2)\frac{x^4+3}{\cancel{x-1}}+(x-1)\cancel{(x-2)}\frac{x^2}{\cancel{x-2}}=0\cdot(x-1)(x-2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^4+3)+x^2(x-1)=0\Leftrightarrow$$

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $f:[1,2]\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=x(x^6+2)+(x+1)(x^2+1)$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= (1-2)(1^4+3)+1^2(1-1)=-4<0 \\ f(2) &= (2-2)(2^4+3)+2^2(2-1)=4>0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1)f(2)<0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστο μία ρίζα ρ στο διάστημα $(1,2)$ και επειδή προφανώς $\rho\neq 1$ και $\rho\neq 2$ η ρίζα αυτή θα είναι και ρίζα

$$\text{της εξίσωσης } \frac{x^4+3}{x-1}+\frac{x^2}{x-2}=0$$

10.13 4)

$$\frac{x^2+1}{x-\alpha}+\frac{x^6+1}{x-\beta}=0 \quad \text{πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(x-\alpha)}(x-\beta)\frac{x^2+1}{\cancel{x-\alpha}}+(x-\alpha)\cancel{(x-\beta)}\frac{x^6+1}{\cancel{x-\beta}}=0\cdot(x-\alpha)(x-\beta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)(x^2+1)+(x^6+1)(x-\beta)=0$$

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$ με

$$f(x)=(x-\alpha)(x^2+1)+(x^6+1)(x-\beta)$$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(\alpha) &= (\alpha-\alpha)(\alpha^2+1)+(\alpha^6+1)(\alpha-\beta)=(\alpha^6+1)(\alpha-\beta) & \begin{matrix} \alpha<\beta\Rightarrow\alpha-\beta<0 \\ < 0 \end{matrix} \\ f(\beta) &= (\beta-\alpha)(\beta^2+1)+(\beta^6+1)(\beta-\beta)=(\beta-\alpha)(\beta^2+1) & \begin{matrix} \alpha<\beta\Rightarrow\beta-\alpha>0 \\ > 0 \end{matrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\alpha)f(\beta)<0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστο μία ρίζα ρ στο διάστημα (α,β) και επειδή προφανώς $\rho\neq\alpha$ και $\rho\neq\beta$ η ρίζα αυτή θα είναι και ρίζα

$$\text{της εξίσωσης } \frac{x^2+1}{x-\alpha}+\frac{x^6+1}{x-\beta}=0$$

10.13 5)

$$\frac{\alpha}{x-\lambda}+\frac{\beta}{x-\mu}+\frac{\gamma}{x-\nu}=0 \quad \text{πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(x-\lambda)}(x-\mu)(x-\nu)\frac{\alpha}{\cancel{x-\lambda}}+(x-\lambda)\cancel{(x-\mu)}(x-\nu)\frac{\beta}{\cancel{x-\mu}}+$$

$$+(x-\lambda)(x-\mu)\cancel{(x-\nu)}\frac{\gamma}{\cancel{x-\nu}}=0\cdot(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha(x-\mu)(x-\nu)+\beta(x-\lambda)(x-\nu)+\gamma(x-\lambda)(x-\mu)=0$$

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $f : [\lambda, \nu] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \alpha(x - \mu)(x - \nu) + \beta(x - \lambda)(x - \nu) + \gamma(x - \lambda)(x - \mu)$$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\lambda, \mu]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda) &= \alpha(\lambda - \mu)(\lambda - \nu) + \beta(\lambda - \lambda)(\lambda - \nu) + \gamma(\lambda - \lambda)(x - \mu) = \\ &= \alpha(\lambda - \mu)(\lambda - \nu) \stackrel{\alpha > 0, \lambda - \mu > 0, \lambda - \nu > 0}{>} 0 \\ f(\mu) &= \alpha(\mu - \mu)(\mu - \nu) + \beta(\mu - \lambda)(\mu - \nu) + \gamma(\mu - \lambda)(\mu - \mu) = \\ &= \beta(\mu - \lambda)(\mu - \nu) \stackrel{\beta > 0, \mu - \lambda < 0, \mu - \nu > 0}{<} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\lambda)f(\mu) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστο μία ρίζα ρ_1 στο διάστημα (λ, μ) και επειδή προφανώς $\rho_1 \neq \lambda$, $\rho_1 \neq \mu$ και $\rho_1 \neq \nu$ η ρίζα αυτή θα είναι

$$\text{και ρίζα της εξίσωσης } \frac{\alpha}{x - \lambda} + \frac{\beta}{x - \mu} + \frac{\gamma}{x - \nu} = 0$$

Ομοίως η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\mu, \nu]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(\mu) &= \alpha(\mu - \mu)(\mu - \nu) + \beta(\mu - \lambda)(\mu - \nu) + \gamma(\mu - \lambda)(\mu - \mu) = \\ &= \beta(\mu - \lambda)(\mu - \nu) \stackrel{\beta > 0, \mu - \lambda < 0, \mu - \nu > 0}{<} 0 \\ f(\nu) &= \alpha(\nu - \mu)(\nu - \nu) + \beta(\nu - \lambda)(\nu - \nu) + \gamma(\nu - \lambda)(\nu - \mu) = \\ &= \gamma(\nu - \lambda)(\nu - \mu) \stackrel{\gamma > 0, \nu - \lambda < 0, \nu - \mu < 0}{<} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\mu)f(\nu) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f , έχει τουλάχιστο μία ρίζα ρ_2 στο διάστημα (μ, ν) και επειδή προφανώς $\rho_2 \neq \lambda$, $\rho_2 \neq \mu$ και $\rho_2 \neq \nu$ η ρίζα αυτή θα είναι

$$\text{και ρίζα της εξίσωσης } \frac{\alpha}{x - \lambda} + \frac{\beta}{x - \mu} + \frac{\gamma}{x - \nu} = 0$$

Οπότε τελικά η εξίσωση $\frac{\alpha}{x - \lambda} + \frac{\beta}{x - \mu} + \frac{\gamma}{x - \nu} = 0$ δύο τουλάχιστον ρίζες στο

διάστημα (λ, ν) , (μία στο (λ, μ) και μια (μ, ν))