

10.12 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 5x^2 - x - 1$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 + 5(-1)^2 - (-1) - 1 = -1 + 5 + 1 - 1 = 4 > 0 \\ f(0) &= 0^3 + 5 \cdot 0^2 - 0 - 1 = -1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1)f(0) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$

Επίσης, η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 + 5 \cdot 0^2 - 0 - 1 = -1 < 0 \\ f(1) &= 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 1 - 1 = 4 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Επομένως η εξίσωση $x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$, έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες, μία στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία διάστημα $(0, 1)$

10.12 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^6 + x - 5$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 0]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= (-2)^6 - 2 - 5 = 55 > 0 \\ f(0) &= 0^6 + 0 - 5 = -5 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-2)f(0) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^6 + x = 5$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$

Επίσης, η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^6 + 0 - 5 = -5 < 0 \\ f(2) &= 2^6 + 2 - 5 = 59 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(2) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^6 + x = 5$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$

Επομένως η εξίσωση $x^6 + x = 5$, έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες, μία στο διάστημα $(-2, 0)$ και μία διάστημα $(0, 2)$

10.12 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + x^2 - 2x - 3$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 0]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= (-2)^4 + (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 21 > 0 \\ f(0) &= 0^4 + 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-2)f(0) < 0$$

Οπότε , από το θεώρημα Bolzano , η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^4 + x^2 - 2x - 3 = 0$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$

Επίσης , η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^4 + 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0 \\ f(2) &= 2^4 + 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = 13 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(2) < 0$$

Οπότε , από το θεώρημα Bolzano , η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^4 + x^2 - 2x - 3 = 0$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$

Επομένως η εξίσωση $x^4 + x^2 - 2x - 3 = 0$, έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες , μία στο διάστημα $(-2, 0)$ και μία διάστημα $(0, 2)$