

10.11 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - x + 3$
(Επιλέξαμε το διάστημα $[-2, 0]$, μετά από υπολογισμούς, προκειμένου να πετύχει το θεώρημα Bolzano)

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 0]$, ως πολυωνυμική
- $$\left. \begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - (-2) + 3 = -8 + 2 + 3 = -3 < 0 \\ f(0) &= 0^3 - 0 + 3 = 3 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-2)f(0) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^3 = x - 3$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$, άρα και στο $\mathbb{R}$

10.11 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 1$

(Επιλέξαμε το διάστημα $[-2, 0]$, μετά από υπολογισμούς, προκειμένου να πετύχει το θεώρημα Bolzano)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 0]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= (-2)^5 + 2 \cdot (-2)^4 - 3 \cdot (-2)^2 + 1 = -11 < 0 \\ f(0) &= 0^5 + 2 \cdot 0^4 - 3 \cdot 0^2 + 1 = 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-2)f(0) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^3 - x^2 - x + 4 = 0$, έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$, άρα και στο $\mathbb{R}$

10.11 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

(Επιλέξαμε το διάστημα $[-2, 0]$, μετά από υπολογισμούς, προκειμένου να πετύχει το θεώρημα Bolzano)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 0]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= (-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) - 1 = 1 > 0 \\ f(0) &= 0^4 + 0^3 - 0^2 + 0 - 1 = -1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-2)f(0) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ και συγκεκριμένα $\xi \in (-2, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^4 + \xi^3 - \xi^2 + \xi - 1 = 0$

10.11 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^6 - x^5 - x^3 + x - 2$

(Επιλέξαμε το διάστημα $[-2, 0]$, μετά από υπολογισμούς, προκειμένου να πετύχει το θεώρημα Bolzano)

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 0]$, ως πολυωνυμική

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = (-2)^6 - (-2)^5 - (-2)^3 + (-2) - 2 = 100 > 0 \\ f(0) = 0^6 - 0^5 - 0^3 + 0 - 2 = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-2)f(0) < 0$$

Οπότε , από το θεώρημα Bolzano , υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ και συγκεκριμένα $\xi \in (-2, 0)$ τέτοιο
ώστε $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^6 - \xi^5 - \xi^3 + \xi - 2 = 0$