

10.10 1)

Παρατηρούμε ότι

στο διάστημα $[1, 2)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

στο διάστημα $(2, 3]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

και

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x + 1) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^3 - x - 15) = 2 \cdot 2^3 - 2 - 15 = -1 \\ f(2) &= 2 \cdot 2^3 - 2 - 15 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 2$$

Οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$ (1)

Ακόμη

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1 < 0 \\ f(3) &= 2 \cdot 3^3 - 3 - 15 = 36 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1)f(3) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 3)$ ώστε $f(x_0) = 0$

10.10 2)

Παρατηρούμε ότι

στο διάστημα $[-2, 0)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

στο διάστημα $(0, 1]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

και

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 + 2x + 1) = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 3x + 1) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(0) &= 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 0$$

Οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 1]$ (1)

Ακόμη

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 1 = 9 > 0 \\ f(1) &= 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-2)f(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-2, 1)$ ώστε $f(\xi) = 0$