

Θα ακολουθήσουμε τα εξής βήματα

α) Θα αποδείξουμε ότι $f(0) = 0$

β) Θα αποδείξουμε ότι $f(-x) = -f(x)$

γ) Θα αποδείξουμε ότι $f(x) \geq x$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \leq x \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=0} f(0) \leq 0 \\ f(x+y) \leq f(x) + f(y) \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=y=0} f(0) \leq f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0$$

Ακόμη

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \leq x \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -x} f(-x) \leq -x \\ f(x) \leq x \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} f(-x) + f(x) \leq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x+y) \leq f(x) + f(y) \xRightarrow{\text{θέτουμε } y=-x} f(0) \leq f(x) + f(-x) \xRightarrow{f(0)=0} f(-x) + f(x) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x) + f(x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Επίσης

$$f(x) \leq x \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -x} f(-x) \leq -x \xRightarrow{f(-x) = -f(x)} -f(x) \leq -x \Rightarrow f(x) \geq x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Και επειδή $f(x) \leq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι $\boxed{f(x) = x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$