

$$\alpha) \quad f(f(x+y)) = xf(x) + yf(y) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=y=0} f(f(0)) = 0 \quad (1)$$

$$f(f(x+y)) = xf(x) + yf(y) \xrightarrow{\text{θέτουμε } y=-x} f(f(x-x)) = xf(x) - xf(-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f(0)) = xf(x) - xf(-x) \xrightarrow{(1)} xf(x) - xf(-x) = 0 \Rightarrow x[f(x) - f(-x)] = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad f(x) - f(-x) = 0 \Rightarrow \boxed{f(-x) = f(x)}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η σχέση $f(-x) = f(x)$ ισχύει για κάθε $x \neq 0$

Προφανώς όμως η σχέση $f(-x) = f(x)$ ισχύει και για $x = 0$

Οπότε τελικά η σχέση $f(-x) = f(x)$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα η συνάρτηση είναι άρτια

$$\beta) \quad f(f(x+y)) = xf(x) + yf(y) \xrightarrow{\text{θέτουμε } y=0} f(f(x)) = xf(x) \quad (2)$$

Οπότε

$$(2) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -x} f(f(-x)) = -xf(-x) \xrightarrow{f(-x)=f(x)} f(f(x)) = -xf(x) \quad (3)$$

Έτσι

$$(2), (3) \xrightarrow{\text{πρώτα μέλη ίσα}} xf(x) = -xf(x) \Rightarrow 2xf(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad \boxed{f(x) = 0}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η σχέση $f(x) = 0$ ισχύει για κάθε $x \neq 0$

Μένει να αποδειχτεί ότι η σχέση $f(x) = 0$ ισχύει και για $x = 0$ δηλαδή μένει να αποδειχτεί ότι $f(0) = 0$. Πράγματι

$$(2) \Rightarrow f(f(x)) = xf(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1} f(f(1)) = 1 \cdot f(1) \xrightarrow{f(1)=0} \boxed{f(0) = 0}$$

Άρα τελικά $f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$