

Έστω ότι υπάρχουν συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$f(x) + g(y) = xy. \text{ Τότε}$$

$$f(x) + g(y) = xy \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0, y=0} f(0) + g(0) = 0 \quad (1)$$

$$f(x) + g(y) = xy \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1, y=1} f(1) + g(1) = 1 \quad (2)$$

Ακόμη

$$\left. \begin{array}{l} f(x) + g(y) = xy \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1, y=0} f(1) + g(0) = 0 \\ f(x) + g(y) = xy \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0, y=1} f(0) + g(1) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε κατά μέλη} \\ \Rightarrow f(1) + g(0) + f(0) + g(1) = 0 \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow f(1) + g(1) + g(0) + f(0) = 0 \xrightarrow[\substack{(1) \Rightarrow f(0) + g(0) = 0 \\ (2) \Rightarrow f(1) + g(1) = 1}]{\Rightarrow} 1 + 0 = 0 \quad \text{άτοπο}$$

Άρα δεν υπάρχουν συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$f(x) + g(y) = xy$$