

Αρκεί να αποδειχτεί ότι  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_0) = 0$

$$f^2(x) - f(x) - 1 = x(x-1) \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } x_0} f^2(x_0) - f(x_0) - 1 = x_0(x_0 - 1) \Rightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} -1 = x_0^2 - x_0 \Rightarrow x_0^2 - x_0 + 1 = 0 \text{ \textbf{άτοπο}}$$

διότι η παραπάνω εξίσωση έχει διακρίνουσα  $\Delta = -3 < 0$  και άρα δεν έχει λύση

οπότε **δεν υπάρχει**  $x_0 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_0) = 0$