

α) Πεδίο ορισμού είναι προφανώς το $\mathbb{R} - \{2\}$

β) Είναι

$$\begin{cases} f(-1) = -\frac{2}{3} \\ \text{και} \\ f(4) = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha(-1) + \beta}{-1-2} = -\frac{2}{3} \\ \frac{\alpha \cdot 4 + \beta}{4-2} = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-\alpha + \beta}{-3} = -\frac{2}{3} \\ \frac{4\alpha + \beta}{2} = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = 2 \\ 4\alpha + \beta = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

γ) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 3$ η f γίνεται $f(x) = \frac{x+3}{x-2} \Leftrightarrow y = \frac{x+3}{x-2}$

Οπότε

τέμνει τον $x'x$ όταν $y=0$ οπότε $0 = \frac{x+3}{x-2} \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

Άρα τέμνει τον $x'x$ στο $(-3, 0)$

τέμνει τον $y'y$ όταν $x=0$ οπότε $y = \frac{0+3}{0-2} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}$

Άρα τέμνει τον $y'y$ στο $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

δ) Πρέπει

$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x-2} > 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

ε) $f(x) = 6 \Rightarrow \frac{x+3}{x-2} = 6 \Rightarrow x+3 = 6(x-2) \Rightarrow x+3 = 6x-12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -5x = -15 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

στ) $g(x) = -2 \Rightarrow 2f(2x-5) + 6 = -2 \Rightarrow 2 \frac{(2x-5)+3}{(2x-5)-2} + 6 = -2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \frac{2x-2}{2x-7} = -8 \Rightarrow 4x-4 = -8(2x-7) \Rightarrow 4x-4 = -16x+56 \Rightarrow 20x = 60 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

ζ) Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x+3}{x-2} \\ y = \frac{4x-2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4x-2}{x} = \frac{x+3}{x-2} \\ y = \frac{4x-2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4x-2)(x-2) = x(x+3) \\ y = \frac{4x-2}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 8x - 2x + 4 = x^2 + 3x \\ y = \frac{4x-2}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 13x + 4 = 0 \quad \Delta = 169 - 48 = 121 \quad x_{1,2} = \frac{13 \pm 11}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \\ y = \frac{4x-2}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=\frac{7}{2} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-2 \end{cases}$$

Άρα τέμνονται στα σημεία $\left(\frac{1}{3}, -2\right)$ και $\left(4, \frac{7}{2}\right)$

η) Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{x+3}{x-2} \\ y=-5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x+1=\frac{x+3}{x-2} \\ y=-5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-5x+1)(x-2)=x+3 \\ y=-5x+1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} (-5x+1)(x-2)=x+3 \\ y=-5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x^2+10x+x-2=x+3 \\ y=-5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x^2+10x-5=0 \\ y=-5x+1 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ y=-5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2=0 \\ y=-5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$$

Άρα τέμνονται στο σημείο $(1, -4)$