

α) Πεδίο ορισμού είναι προφανώς το $\mathbb{R}$

β) Είναι

$$\begin{cases} f(2)=4 \\ \text{και} \\ f(-1)=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^2 + \alpha \cdot 2 + \beta = 4 \\ (-1)^2 + \alpha(-1) + \beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

γ) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$ η f γίνεται $f(x) = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow y = x^2 + x - 2$

Οπότε

τέμνει τον $x'x$ όταν $y=0$ οπότε $0 = x^2 + x - 2$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Άρα τέμνει τον $x'x$ στο $(4, 0)$ και στο $(1, 0)$

τέμνει τον $y'y$ όταν $x=0$ οπότε $y = 0^2 + 0 - 2 = -2$

Άρα τέμνει τον $y'y$ στο $(0, -2)$

δ) Πρέπει

$$f(x) < 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow -2 < x < 1$$

ε) $f(x) = 10 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 10 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$$\Delta = 1 + 48 = 49 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

στ) $g(x) = 2 \Rightarrow f(x+1) + f(x-2) = 2$

$$\Rightarrow x^2 + \cancel{2x} + \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{1} - \cancel{2} + x^2 - \cancel{4x} + \cancel{4} + \cancel{x} - \cancel{2} - \cancel{2} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

ζ) Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = x^2 - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x^2} - 5 = \cancel{x^2} + x - 2 \\ y = x^2 - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Άρα τέμνονται στο σημείο $(-3, 4)$

η) Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = -3x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 3 = x^2 + x - 2 \\ y = -3x + 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 5 = 0 \\ y = -3x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 5 = 0 \\ y = -3x + 3 \end{cases} \quad \Delta = 16 + 20 = 36 \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 18 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα τέμνονται στα σημεία $(-5, 18)$ και $(1, 0)$