

1.49 1)

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1 \Rightarrow f(x) \geq \ln x + 1 \quad (1)$$

Ακόμη

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } xe} f\left(\frac{xe}{e}\right) \leq \ln(xe) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \ln x + \ln e \Rightarrow f(x) \leq \ln x + 1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(x) = 1 + \ln x, \text{ για κάθε } x > 0$$

1.49 2)

$$f(x) - x \leq x^2 \leq f(x-1) + x \Rightarrow f(x) - x \leq x^2 \Rightarrow f(x) \leq x^2 + x \quad (1)$$

Ακόμη

$$f(x) - x \leq x^2 \leq f(x-1) + x \Rightarrow x^2 \leq f(x-1) + x \Rightarrow f(x-1) \geq x^2 - x \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+1-1) \geq (x+1)^2 - (x+1) \Rightarrow f(x) \geq x^2 + 2x + 1 - x - 1 \Rightarrow f(x) \geq x^2 + x \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(x) = x^2 + x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1.49 3)

$$(x^2 + 1)f(x) \leq 2x \xrightarrow{x^2 + 1 > 0} f(x) \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \quad (1)$$

Ακόμη

$$(x^2 + 1)f(x) \leq 2x \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -x} (x^2 + 1)f(-x) \leq -2x \xrightarrow{f: \text{περιττή} \Rightarrow f(-x) = -f(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x^2 + 1)f(x) \leq -2x \xrightarrow{-(x^2 + 1) < 0} f(x) \geq \frac{-2x}{-(x^2 + 1)} \Rightarrow f(x) \geq \frac{2x}{x^2 + 1} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1.49 4)

$$\alpha) f(x+y) \geq f(x) + f(y) \geq x+y \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=y=0} f(0) \geq f(0) + f(0) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) \geq 2f(0) \geq 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(0) \geq 2f(0) \Rightarrow f(0) \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

$$\beta) f(x+y) \geq f(x) + f(y) \geq x+y \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } y \text{ το } -x} f(x-x) \geq f(x) + f(-x) \geq x-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) \geq f(x) + f(-x) \geq 0 \xrightarrow{f(0)=0} 0 \geq f(x) + f(-x) \geq 0 \Rightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(-x) = -f(x)}$$

$$\gamma) f(x+y) \geq f(x) + f(y) \geq x+y \xrightarrow{\text{θέτουμε } y=0} f(x) \geq f(x) + f(0) \geq x \xrightarrow{f(0)=0} f(x) \geq x \quad (1)$$

Ακόμη

$$(1) \Rightarrow f(x) \geq x \quad \overset{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -x}{\Rightarrow} f(-x) \geq -x \quad \overset{f(-x) = -f(x)}{\Rightarrow} -f(x) \geq -x \quad \overset{\text{διαφύμε με } -1 < 0}{\Rightarrow} f(x) \leq x \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$