

1.48 1)

$$f(x) + xf(-x) = x - 1 \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -x} f(-x) - xf(x) = -x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -xf(x) + f(-x) = -x - 1$$

Οπότε (προκύπτει κάτι σαν σύστημα)

$$\begin{cases} f(x) + xf(-x) = x - 1 \\ (-x) \cdot \begin{cases} f(x) + xf(-x) = x - 1 \\ -xf(x) + f(-x) = -x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + xf(-x) = x - 1 \\ x^2 f(x) - xf(-x) = x^2 + x \end{cases} \quad \xRightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} \end{cases}$$

$$(x^2 + 1)f(x) = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}}$$

1.48 2)

$$xf(x) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 3 \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -\frac{1}{x}} -\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(x) - \frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) = 3$$

Οπότε (προκύπτει κάτι σαν σύστημα)

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \begin{cases} xf(x) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 3 \\ 2f(x) - \frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + \frac{2}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x} \\ 4f(x) - \frac{2}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) = 6 \end{cases} \quad \xRightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} 5f(x) = \frac{3}{x} + 6 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5f(x) = \frac{6x + 3}{x} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{6x + 3}{5x}}$$

1.48 3)

$$3f(x) - 2f(3-x) = x \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } 3-x} 3f(3-x) - 2f(x) = 3-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2f(x) + 3f(3-x) = 3-x$$

Οπότε (προκύπτει κάτι σαν σύστημα)

$$\begin{cases} 3f(x) - 2f(3-x) = x \\ 2f(x) - 3f(3-x) = 3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9f(x) - 6f(3-x) = 3x \\ -4f(x) + 6f(3-x) = 6-2x \end{cases} \quad \xRightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5f(x) = 6 + x \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{x + 6}{5}}$$

1.48 4)

$$f(x+2) + g(2x+1) = x - 1 \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+1+2) + g(2(x+1)+1) = x+1-1 \Rightarrow f(x+3) + g(2x+3) = x$$

Οπότε (προκύπτει κάτι σαν σύστημα)

$$\begin{cases} f(x+3) + 2g(2x+3) = x+1 \\ -2 \cdot \begin{cases} f(x+3) + g(2x+3) = x \\ f(x+3) + 2g(2x+3) = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+3) + 2g(2x+3) = x+1 \\ -2f(x+3) - 2g(2x+3) = -2x \end{cases} \quad \xRightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} \end{cases}$$

$$-f(x+3) = -x+1 \Rightarrow f(x+3) = x-1 \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } x-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x-3+3) = x-3-1 \Rightarrow \boxed{f(x) = x-4}$$

Ακόμη (στο ίδιο σύστημα) έχουμε

$$\begin{cases} f(x+3) + 2g(2x+3) = x+1 \\ -1 \cdot \begin{cases} f(x+3) + g(2x+3) = x \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+3) + 2g(2x+3) = x+1 \\ -f(x+3) - g(2x+3) = -x \end{cases} \xrightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(2x+3) = 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } \frac{x-3}{2}} \Rightarrow g\left(\cancel{2} \frac{x-3}{\cancel{2}} + 3\right) = 1 \Rightarrow \boxed{g(x) = 1}$$

1.48 5)

α) $f(x-1) - 2f(3-x) = 6x-15 \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } x+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x+1-1) - 2f(3-x-1) = 6(x+1)-15 \Rightarrow \boxed{f(x) - 2f(2-x) = 6x-9} \quad (1)$$

β) Από την σχέση του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε

$$f(x) - 2f(2-x) = 6x-9 \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } 2-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2-x) - 2f(2-2+x) = 6(2-x)-15 \Rightarrow \boxed{f(2-x) - 2f(x) = -6x+3} \quad (2)$$

γ) $(1), (2) \Rightarrow 2 \cdot \begin{cases} f(x) - 2f(2-x) = 6x-9 \\ f(2-x) - 2f(x) = -6x+3 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) - 2f(2-x) = 6x-9 \\ 2f(2-x) - 4f(x) = -12x+6 \end{cases} \xrightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} \Rightarrow -3f(x) = -6x-3 \Rightarrow \boxed{f(x) = 2x+1}$$