1.47 1)

$$f^2(x)+g^2(x)=2\left[(f+g)(x)-1\right]\Rightarrow f^2(x)+g^2(x)=2f(x)+2g(x)-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^2(x)-2f(x)+1+g^2(x)-2g(x)+1=0\Rightarrow\left[f(x)-1\right]^2+\left[g(x)-1\right]^2=0$$

Όμως $\left[f(x)-1\right]^2\geq 0$ και $\left[g(x)-1\right]^2\geq 0$

Άρα υποχρεωτικά

$$\begin{cases} f(x)-1=0 \\ g(x)-1=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f(x)=1 \\ g(x)=1 \end{cases}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

1.47 2)

$$2(f+g)(x)\left[(f+g)(x)-2x\right]\leq\left((f+g)(x)\right)^2-\left[(f-g)(x)\right]^2-4x^2\overset{\substack{(f+g)(x)=f(x)+g(x)\\(f-g)(x)=f(x)-g(x)}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2\left[f(x)+g(x)\right]\left[f(x)+g(x)-2x\right]\leq\left[f(x)+g(x)\right]^2-\left[f(x)-g(x)\right]^2-4x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left[f(x)+g(x)\right]\left[f(x)+g(x)-2x\right]\leq\left[f(x)+g(x)\right]^2-\left[f(x)-g(x)\right]^2-4x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[2f(x)+2g(x)\right]\left[f(x)+g(x)-2x\right]\leq f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)-$$

$$-\left[f^2(x)-2f(x)g(x)+g^2(x)\right]-4x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f^2(x)+2f(x)g(x)-4xf(x)+2f(x)g(x)+2g^2(x)-4xg(x)\leq$$

$$\leq\cancel{f^2(x)}+2f(x)g(x)+\cancel{g^2(x)}-\cancel{f^2(x)}+2f(x)g(x)-\cancel{g^2(x)}-4x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f^2(x)+2g^2(x)+\cancel{4f(x)g(x)}-4xf(x)-4xg(x)\leq\cancel{4f(x)g(x)}-4x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f^2(x)+2g^2(x)-4xf(x)-4xg(x)+4x^2\leq 0\overset{\text{διαιρούμε με }2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f^2(x)+g^2(x)-2xf(x)-2xg(x)+2x^2\leq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^2(x)+g^2(x)-2xf(x)-2xg(x)+x^2+x^2\leq 0\Rightarrow\left[f(x)-x\right]^2+\left[g(x)-x\right]^2\leq 0$$

Όμως $\left[f(x)-x\right]^2\geq 0$ και $\left[g(x)-x\right]^2\geq 0$

Οπότε υποχρεωτικά είναι

$$\begin{cases} f(x)-x=0 \\ g(x)-x=0 \end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{matrix} f(x)=x \\ g(x)=x \end{matrix}}$$