

1.46 1)

$$\alpha) \quad f(f(x)) = 3x + 4 \xRightarrow{\text{"f \acute{α}ρουμε"}} f(f(f(x))) = f(3x + 4) \quad (1)$$

$$f(f(x)) = 3x + 4 \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(x)} f(f(f(x))) = 3f(x) + 4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(3x + 4) = 3f(x) + 4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\beta) \quad f(3x + 4) = 3f(x) + 4 \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -2} f(3(-2) + 4) = 3f(-2) + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-2) = 3f(-2) + 4 \Rightarrow -2f(-2) = 4 \Rightarrow f(-2) = -2$$

1.46 2)

$$\alpha) \quad f(f(x)) = 3x - 2 \xRightarrow{\text{"f \acute{α}ρουμε"}} f(f(f(x))) = f(3x - 2) \quad (1)$$

$$f(f(x)) = 3x - 2 \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(x)} f(f(f(x))) = 3f(x) - 2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(3x - 2) = 3f(x) - 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\beta) \quad f(3x - 2) = 3f(x) - 2 \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } 1} f(3 \cdot 1 - 2) = 3f(1) - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) = 3f(1) - 2 \Rightarrow -2f(1) = -2 \Rightarrow f(1) = 1$$

1.46 3)

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1 \xRightarrow{\text{"f \acute{α}ρουμε"}} f(f(f(x))) = f(x^2 - x + 1) \quad (1)$$

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1 \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(x)} f(f(f(x))) = f^2(x) - f(x) + 1 \quad (2)$$

Επομένως

$$(1), (2) \Rightarrow f(x^2 - x + 1) = f^2(x) - f(x) + 1 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=1}$$

$$\Rightarrow f(1^2 - 1 + 1) = f^2(1) - f(1) + 1 \Rightarrow f(1^2 - 1 + 1) = f^2(1) - f(1) + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) = f^2(1) - f(1) + 1 \Rightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0 \Rightarrow [f(1) - 1]^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{f(1) = 1}$$