

1.45 1)

$$\alpha) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=y=0} f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow 2f(0) = f(0) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\beta) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } y \text{ το } -x} f(x-x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \xrightarrow{f(0)=0} f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι **περιττή**

1.45 2)

$$\alpha) \quad f(x+y) + f(y-x) = 5f(x) \cdot f(y) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=y=0} f(0+0) + f(0-0) = 5f(0) \cdot f(0) \Rightarrow \\ \Rightarrow 5f^2(0) - 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0)[5f(0) - 2] = 0 \xrightarrow{f(0) \neq 0} 5f(0) - 2 = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2}{5}$$

$$\beta) \quad f(x+y) + f(y-x) = 5f(x) \cdot f(y) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } y=0} f(x) + f(-x) = 5f(x) \cdot f(0) \xrightarrow{f(0)=\frac{2}{5}} \\ \Rightarrow f(x) + f(-x) = \cancel{5}f(x) \cdot \frac{2}{\cancel{5}} \Rightarrow f(x) + f(-x) = 2f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

1.45 3)

$$\alpha) \quad f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)] \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x=y=0} \\ \Rightarrow f(0+0) + f(0-0) = 2[f(0) + f(0)] \Rightarrow 2f(0) = 4f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\beta) \quad f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)] \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} \\ \Rightarrow f(0+y) + f(0-y) = 2[f(0) + f(y)] \xrightarrow{f(0)=0} f(y) + f(-y) = 2f(y) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(-y) = f(y) \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι **άρτια**

1.45 4)

$$\alpha) \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=y=0} f(0+0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = f^2(0) \\ \Rightarrow f^2(0) - f(0) = 0 \Rightarrow f(0)[f(0) - 1] = 0 \xrightarrow{f(x) \neq 0} f(0) - 1 = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

$$\beta) \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x_1=x, x_2=-x} f(x-x) = f(x) \cdot f(-x) \Rightarrow \\ f(0) = f(x) \cdot f(-x) \xrightarrow{f(0)=1} f(x) \cdot f(-x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε

$$f(x) \cdot f(-x) = 1 \Rightarrow \boxed{f(-x) = \frac{1}{f(x)}} \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Οπότε

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x_2 \text{ το } -x_2} f(x_1 - x_2) = f(x_1) \cdot f(-x_2) \xrightarrow{(1)}$$

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) \cdot \frac{1}{f(x_2)} \Rightarrow f(x_1 - x_2) = \frac{f(x_1)}{f(x_2)}, \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

1.45 5)

α) $f(x + y) = f(f(x)) + f(f(y)) \xrightarrow{\text{θέτουμε } y=0} f(x + 0) = f(f(x)) + f(f(0)) \quad (1)$

Όμως $f(f(0)) \xrightarrow{f(0)=0} f(f(0)) = f(0) \Rightarrow f(f(0)) = 0 \quad (2)$

Οπότε

$$(1), (2) \Rightarrow \boxed{f(f(x)) = f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε προφανώς και}$$

$$f(f(y)) = f(y) \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$$f(x + y) = f(f(x)) + f(f(y)) \xrightarrow{\substack{f(f(x))=f(x) \\ f(f(y))=f(y)}} f(x + y) = f(x) + f(y)$$

β) $f(x + y) = f(x) + f(y) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } y \text{ το } -x} f(x - x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \xrightarrow{f(0)=0} f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι **περιττή**