

$$\alpha) f(x) = \sqrt{x^2}$$

Πρέπει $x^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Άρα } A_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = (\sqrt{x})^2$$

Πρέπει $x \geq 0$. Άρα $A_g = [0, +\infty)$

β) Οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες αφού έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού

γ) Αν $x \geq 0$ είναι

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \stackrel{x \geq 0}{=} x \\ g(x) = (\sqrt{x})^2 = x \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Άρα το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$ είναι το $[0, +\infty)$

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + |x|}$$

$$\text{Πρέπει } x^2 + |x| \neq 0 \stackrel{x^2 = |x|^2}{\Rightarrow} |x|^2 + |x| \neq 0 \Rightarrow |x|(|x| + 1) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \\ |x| + 1 \neq 0 \text{ ισχύει πάντα} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } A_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$g(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$$

Πρέπει $|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$. Άρα $A_g = \mathbb{R} - \{0\}$

β) Οι συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Μένει να δούμε αν έχουν και τον ίδιο τύπο. Όμως

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + |x|} \stackrel{|x|^2 = x^2}{\Rightarrow} \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + |x|} = \frac{(|x| - 1)(\cancel{|x| + 1})}{|x|(\cancel{|x| + 1})} = \frac{|x| - 1}{|x|} = \frac{|x|}{|x|} - \frac{1}{|x|} = 1 - \frac{1}{|x|} = g(x)$$

Άρα οι συναρτήσεις είναι ίσες

$$\alpha) f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x}^2 \neq 1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{και} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } A_f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{x} + 1$$

$$\text{Πρέπει } x \geq 0$$

$$\text{Άρα } A_g = [0, +\infty)$$

β) Οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες αφού έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού

γ) Αν $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε με την συζυγή παράσταση}}{=} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}^2-1^2} =$$

$$\frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \sqrt{x} + 1 = g(x)$$

Άρα το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$ είναι το $[0, 1) \cup (1, +\infty)$

1.39 4)

α) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$

$$\text{Πρέπει } x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1. \text{ Άρα } A_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}. \text{ Πρέπει } x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1. \text{ Άρα } A_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

β) Οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες αφού έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού

γ) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} \\ g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}} \Rightarrow f(x) = x^2+x+1 \\ g(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \Rightarrow g(x) = x+1 \end{cases}$$

$$\text{Οπότε } f(x) = g(x) \Rightarrow x^2+x+1 = x+1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Άρα το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$ είναι το μονοσύνολο $\{0\}$